Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Anna Bahyrycz

Przestrzenie euklidesowe

Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Przestrzenie euklidesowe

Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Liczby $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi elementu x.
Elementy zbioru $\mathbb{R}^n$ nazywamy wektorami (lub punktami).

Przestrzenie euklidesowe

Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Liczby $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi elementu x.
Elementy zbioru $\mathbb{R}^n$ nazywamy wektorami (lub punktami).
Dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy działania:

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{i} \quad \alpha \cdot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zbiór $\mathbb{R}^n$ z takimi działaniami jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

Przestrzenie euklidesowe

Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Liczby $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi elementu x.
Elementy zbioru $\mathbb{R}^n$ nazywamy wektorami (lub punktami).
Dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy działania:

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{i} \quad \alpha \cdot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zbiór $\mathbb{R}^n$ z takimi działaniami jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.
W przestrzeni R^n wprowadzamy iloczyn skalarny wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x \circ y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Przestrzenie euklidesowe

Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Liczby $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi elementu x.
Elementy zbioru $\mathbb{R}^n$ nazywamy wektorami (lub punktami).
Dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy działania:

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{i} \quad \alpha \cdot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zbiór $\mathbb{R}^n$ z takimi działaniami jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.
W przestrzeni R^n wprowadzamy iloczyn skalarny wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x \circ y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

oraz odwzorowanie $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ zdefiniowane następująco

$$||x|| := \sqrt{x \circ x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

nazywane normą euklidesową.

Definicja 1

Przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$ *z iloczynem skalarnym* $x \circ y$ *i normą* $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$ *nazywamy* n*-wymiarową przestrzenią euklidesową* .

Definicja 1

Przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$ *z iloczynem skalarnym* $x \circ y$ *i normą* $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$ *nazywamy* n*-wymiarową przestrzenią euklidesową* .

Uwaga 1

Norma euklidesowa $\|\cdot\|$, *jak każda norma, zadaje metrykę*

$$d(x,y) := \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

czyli funkcję $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ *spełniającą warunki:*

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Zatem przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną.

Definicja 2

Kulą (otwartą) o środku a $(a \in \mathbb{R}^n)$ *i promieniu* r $(r > 0)$ *nazywamy zbiór*

$$K(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r\}.$$

Zbiory w przestrzeni euklidesowej

Definicja 2

Kulą (otwartą) o środku a $(a \in \mathbb{R}^n)$ *i promieniu* r $(r > 0)$ *nazywamy zbiór*

$$K(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r\}.$$

Definicja 3

Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy każdą kulę o środku* a *i dowolnym promieniu* r *i oznaczamy* $U(a,r)$.

Zbiory w przestrzeni euklidesowej

Definicja 2

Kulą (otwartą) o środku a $(a \in \mathbb{R}^n)$ *i promieniu* r $(r > 0)$ *nazywamy zbiór*

$$K(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r\}.$$

Definicja 3

Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy każdą kulę o środku* a *i dowolnym promieniu* r *i oznaczamy* $U(a,r)$.

Definicja 4

Sąsiedztwem punktu $a \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy każdą kulę o środku* a *i dowolnym promieniu* r *bez środka i oznaczamy* $S(a,r)$.

Definicja 5

Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^n$ *jest punktem wewnętrznym zbioru* A*, jeśli istnieje takie otoczenie punktu* a*, które jest zawarte w zbiorze* A*.*
Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy wnętrzem zbioru.

Definicja 5

Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem wewnętrznym zbioru A, jeśli istnieje takie otoczenie punktu a, które jest zawarte w zbiorze A.
Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy wnętrzem zbioru.

Definicja 6

Zbiór nazywamy zbiorem otwartym, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

Definicja 5

Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^n$ *jest punktem wewnętrznym zbioru* A, *jeśli istnieje takie otoczenie punktu* a, *które jest zawarte w zbiorze* A.
Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy wnętrzem zbioru.

Definicja 6

Zbiór nazywamy zbiorem otwartym, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

Definicja 7

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ *(należący lub nie należący do zbioru* A*) nazywamy punktem skupienia zbioru* A, *jeżeli każde otoczenie punktu* x *zawiera co najmniej jeden element zbioru* A *różny od* x.

Definicja 5

Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem wewnętrznym zbioru A, jeśli istnieje takie otoczenie punktu a, które jest zawarte w zbiorze A.
Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy wnętrzem zbioru.

Definicja 6

Zbiór nazywamy zbiorem otwartym, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

Definicja 7

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ (należący lub nie należący do zbioru A) nazywamy punktem skupienia zbioru A, jeżeli każde otoczenie punktu x zawiera co najmniej jeden element zbioru A różny od x.

Definicja 8

Zbiór nazywamy zbiorem domkniętym, jeżeli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

Definicja 9

Brzegiem zbioru A *nazywamy te wszystkie punkty przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *(należące lub nie należące do zbioru* A *zwane punktami brzegowymi), w których każdym otoczeniu znajduje się zarówno punkt należący jak i nie należący do zbioru* A.

Definicja 9

Brzegiem zbioru A *nazywamy te wszystkie punkty przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *(należące lub nie należące do zbioru* A *zwane punktami brzegowymi), w których każdym otoczeniu znajduje się zarówno punkt należący jak i nie należący do zbioru* A.

Definicja 10

Zbiór nazywamy zbiorem ograniczonym, jeżeli zawiera się w pewnej kuli.

Definicja 9

Brzegiem zbioru A *nazywamy te wszystkie punkty przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *(należące lub nie należące do zbioru* A *zwane punktami brzegowymi), w których każdym otoczeniu znajduje się zarówno punkt należący jak i nie należący do zbioru* A*.*

Definicja 10

Zbiór nazywamy zbiorem ograniczonym, jeżeli zawiera się w pewnej kuli.

Definicja 11

Zbiór otwarty nazywamy obszarem, jeżeli nie da się przedstawić jako suma mnogościowa dwóch zbiorów otwartych, niepustych i rozłącznych.

Definicja 9

Brzegiem zbioru A *nazywamy te wszystkie punkty przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *(należące lub nie należące do zbioru* A *zwane punktami brzegowymi), w których każdym otoczeniu znajduje się zarówno punkt należący jak i nie należący do zbioru* A*.*

Definicja 10

Zbiór nazywamy zbiorem ograniczonym, jeżeli zawiera się w pewnej kuli.

Definicja 11

Zbiór otwarty nazywamy obszarem, jeżeli nie da się przedstawić jako suma mnogościowa dwóch zbiorów otwartych, niepustych i rozłącznych.

Definicja 12

Obszarem domkniętym nazywamy sumę mnogościową obszaru oraz jego brzegu.

Definicja 13

Mówimy, że ciąg (x_k), $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, *jest zbieżny do* $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, *co oznaczamy*

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0,$$

jeśli

$$\lim_{k \to +\infty} d(x_k, x_0) = 0.$$

Definicja 13

Mówimy, że ciąg (x_k), $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, *jest zbieżny do* $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, *co oznaczamy*

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0,$$

jeśli

$$\lim_{k \to +\infty} d(x_k, x_0) = 0.$$

Twierdzenie 1

Jeśli $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ *i* $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, *to*

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x_0 \quad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \lim_{k \to +\infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)} \textit{ dla } i = 1, \ldots, n$$

(czyli ciąg x_k *jest zbieżny do* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po wszystkich swoich współrzędnych).*

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n} \right)$

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right)$
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right)$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

   $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = e^5,$

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n} \right)$
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
   $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = e^5,$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n-1} = 2,$

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right)$
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
   $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = e^5,$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n-1} = 2,$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0,$

   Zatem ciąg jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right) = (1, e^5, 2, 0).$

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right)$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

   $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = e^5,$

   $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n-1} = 2,$

   $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0,$

   Zatem ciąg jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right) = (1, e^5, 2, 0).$

2. $\left(2, (-1)^n, n\sin\frac{1}{n}\right)$

Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

1. $\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right)$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

   $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = e^5,$

   $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n-1} = 2,$

   $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0,$

   Zatem ciąg jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n}\right) = (1, e^5, 2, 0).$

2. $\left(2, (-1)^n, n\sin\frac{1}{n}\right)$

   Ponieważ ciąg $(-1)^n$ *nie ma granicy,*

   więc ciąg $\left(2, (-1)^n, n\sin\frac{1}{n}\right)$ *nie jest zbieżny.*

Definicja 14 (Granica w sensie Cauchy'ego)

Niech $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i* x_0 *będzie punktem skupienia zbioru* D*. Mówimy, że* f *ma granicę w* x_0 *równą* $g \in \mathbb{R}$*, co oznaczamy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla każdego* $x \in D$ *zachodzi implikacja*

$$x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(g, \varepsilon),$$

czyli równoważnie $$0 < d(x_0, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Definicja 14 (Granica w sensie Cauchy'ego)

Niech $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i* x_0 *będzie punktem skupienia zbioru* D. *Mówimy, że* f *ma granicę w* x_0 *równą* $g \in \mathbb{R}$, *co oznaczamy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla każdego* $x \in D$ *zachodzi implikacja*

$$x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(g, \varepsilon),$$

czyli równoważnie $$0 < d(x_0, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Definicja 15 (Granica w sensie Heinego)

Niech $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i* x_0 *będzie punktem skupienia zbioru* D. *Mówimy, że* f *ma granicę w* x_0 *równą* $g \in \mathbb{R}$, *co oznaczamy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

jeśli dla każdego ciągu (x_k) *zachodzi implikacja*

$$\left(x_k \in D \wedge x_k \neq x_0 \text{ dla } k \in \mathbb{N} \wedge \lim_{k \to +\infty} x_k = x_0\right) \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = g.$$

Uwaga 2

Definicje granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i w sensie Heinego są równoważne.

Definicja 16

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ *i* $x_0 \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D *oraz* $A \subset D$*.*
Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* x_0 *jeżeli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

(tzn. funkcja f *ma w punkcie* x_0 *granicę równą wartości).*

Definicja 16

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ *i* $x_0 \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D *oraz* $A \subset D$*.*
Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* x_0 *jeżeli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

(tzn. funkcja f *ma w punkcie* x_0 *granicę równą wartości).*
Mówimy, że funkcja f *jest ciągła w zbiorze* A *jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru* A*.*

Funkcje dwóch zmiennych

Uwaga 3

Z Twierdzenia 1 dla $n = 2$ *otrzymujemy, że ciąg* (a_k, b_k) *jest zbieżny w* $\mathbb{R}^2$ *do punktu* (a_0, b_0) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = a_0 \quad \textit{oraz} \quad \lim_{k\to+\infty} b_k = b_0.$$

Funkcję $f(x,y)$ dwóch zmiennych określamy najczęściej za pomocą jednego lub kilku wzorów.

Wykresem funkcji dwóch zmiennych $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \wedge z = f(x,y)\}.$$

Płaszczyzna

Wykresem funkcji

$$z = Ax + By + C$$

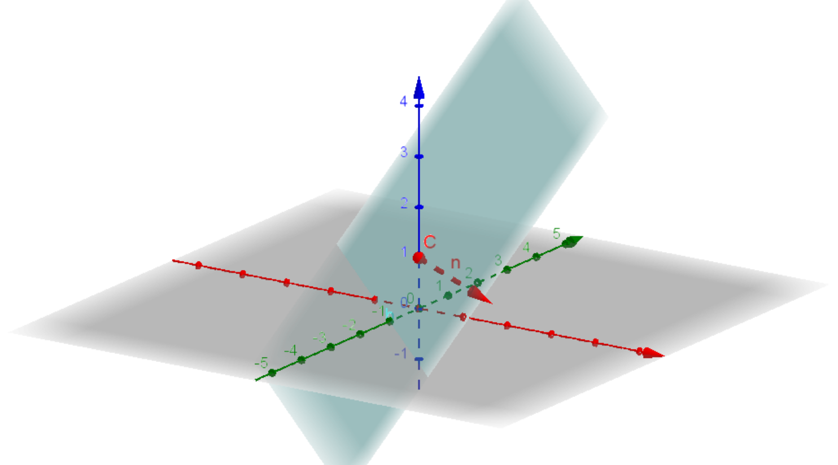
jest płaszczyzna o wektorze normalnym $n = (A, B, -1)$ przechodzą przez $(0, 0, C)$.

Płaszczyzna

Wykresem funkcji

$$z = Ax + By + C$$

jest płaszczyzna o wektorze normalnym $n = (A, B, -1)$ przechodzą przez $(0, 0, C)$.



Paraboloida obrotowa

Wykresem funkcji

$$z = a(x^2 + y^2), \quad a \neq 0$$

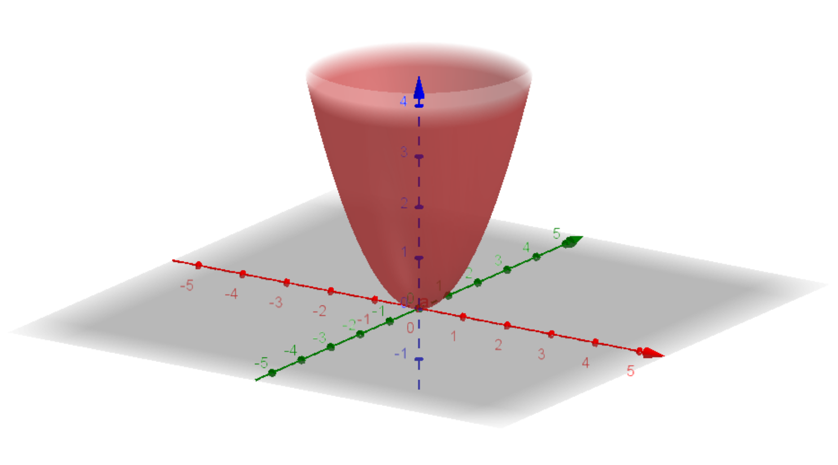
jest paraboloida obrotowa tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ wokół osi 0z.

Paraboloida obrotowa

Wykresem funkcji

$$z = a(x^2 + y^2), \quad a \neq 0$$

jest paraboloida obrotowa tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ wokół osi 0z.



Stożek obrotowy

Wykresem funkcji

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad k \neq 0$$

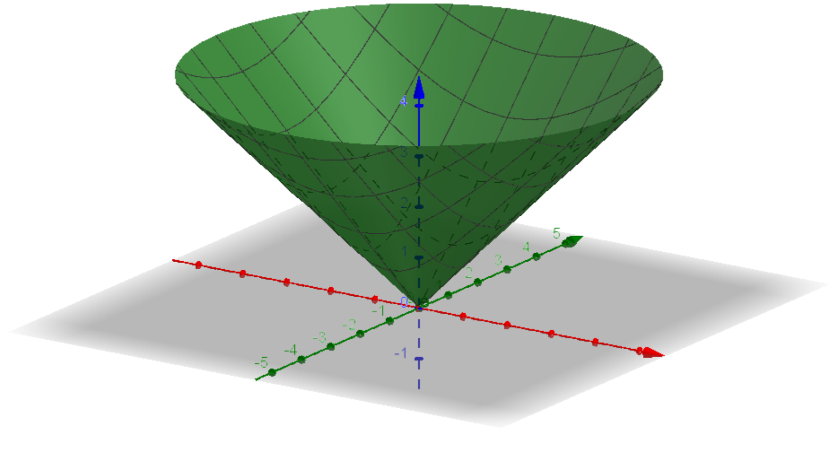
jest stożek obrotowy tj. powierzchnia powstała z obrotu krzywej $z = k|x|$ wokół osi 0z.

Stożek obrotowy

Wykresem funkcji

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad k \neq 0$$

jest stożek obrotowy tj. powierzchnia powstała z obrotu krzywej $z = k|x|$ wokół osi 0z.



Półsfera

Wykresem funkcji

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

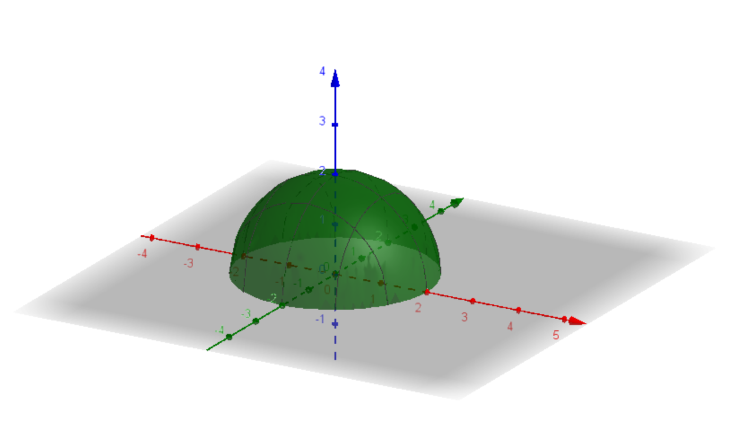
jest górna $(+)$ lub dolna (-) półsfera o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu R.

Półsfera

Wykresem funkcji

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

jest górna $(+)$ lub dolna (-) półsfera o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu R.



Powierzchnia walcowa

Wykresem funkcji

$$z = g(x) \text{ lub } h = g(y)$$

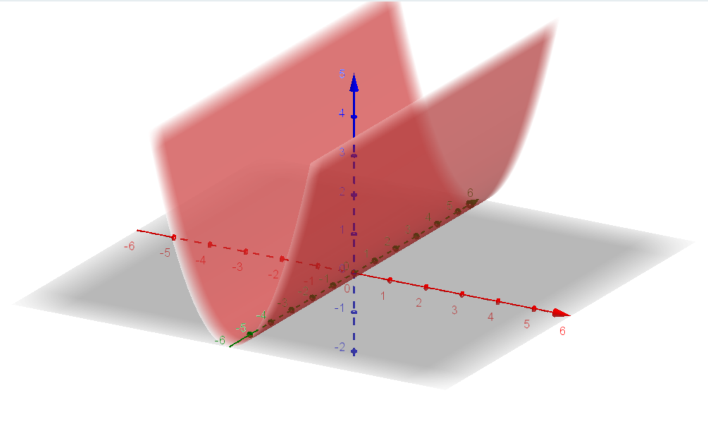
jest powierzchnia walcowa powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równolegle do osi $0Y$ lub wykresu funkcji $h = g(y)$ dla $x = 0$ równolegle do osi $0X$.

Powierzchnia walcowa

Wykresem funkcji

$$z = g(x) \text{ lub } h = g(y)$$

jest powierzchnia walcowa powstała z przesunięcia
wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równolegle do osi $0Y$ lub
wykresu funkcji $h = g(y)$ dla $x = 0$ równolegle do osi $0X$.



Uwaga 4 (Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych)

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $D \subset \mathbb{R}^2$ *oraz* (x_0, y_0) *będzie punktem skupienia zbioru* D*.*
Z Definicji 14 (granicy w sensie Cauchy'ego) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* f *ma granicę w punkcie* (x_0, y_0) *równą* $g \in \mathbb{R}$*, co oznaczamy*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla każdego* $x \in D$ *zachodzi implikacja*

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - g| < \varepsilon.$$

Uwaga 4 (Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych)

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $D \subset \mathbb{R}^2$ *oraz* (x_0, y_0) *będzie punktem skupienia zbioru* D.
Z Definicji 14 (granicy w sensie Cauchy'ego) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* f *ma granicę w punkcie* (x_0, y_0) *równą* $g \in \mathbb{R}$, *co oznaczamy*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla każdego* $x \in D$ *zachodzi implikacja*

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - g| < \varepsilon.$$

Z Definicji 15 (granicy w sensie Heinego) dla $n = 2$ *wynika, że*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

jeśli dla każdego ciągu (x_k, y_k) *zachodzi implikacja*

$$\Big[(x_k, y_k) \in D \wedge (x_k, y_k) \neq (x_0, y_0) \ \text{dla } k \in \mathbb{N} \ \wedge \lim_{k\to+\infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0)\Big]$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = g.$$

Przykład 2

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

Przykład 2

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0, y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Niech (x_n, y_n) *będzie dowolnym ciągiem takim, że*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0) \;\; \textit{i} \;\; (x_n, y_n) \neq (0,0) \;\; \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} =$$

Przykład 2

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0, y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Niech (x_n, y_n) *będzie dowolnym ciągiem takim, że*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0) \ \textit{ i } \ (x_n, y_n) \neq (0,0) \ \textit{ dla } \ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = 0.$$

Przykład 2

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \text{\textit{w punkcie}} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Niech (x_n, y_n) *będzie dowolnym ciągiem takim, że*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (0,0) \ \text{\textit{i}} \ (x_n,y_n) \neq (0,0) \ \text{\textit{dla}} \ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

Przykład 3

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

Przykład 3

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Przykład 3

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ *oraz* $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ *, oczywiście*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0,0) \ \textit{ i } \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0,0) \ \textit{ dla } \ n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0) \ \textit{ i } \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0,0) \ \textit{ dla } \ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0,$$

Przykład 3

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ *oraz* $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, *oczywiście*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0,0) \;\; \textit{i} \;\; \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0,0) \;\; \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0) \;\; \textit{i} \;\; \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0,0) \;\; \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 3

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ *oraz* $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ *, oczywiście*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},0\right) = (0,0) \;\; \textit{i} \;\; \left(\frac{1}{n},0\right) \neq (0,0) \;\; \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x'_n,y'_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = (0,0) \;\; \textit{i} \;\; \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \neq (0,0) \;\; \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n,y'_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Zatem badana granica nie istnieje.

Twierdzenie 2 (O arytmetyce granic funkcji)

Jeżeli $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *oraz funkcje* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *mają skończone granice* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = b$, *to*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y) = a+b$,
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f-g)(x,y) = a-b$,
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\cdot g)(x,y) = a\cdot b$,
4. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f}{g}(x,y) = \frac{a}{b}$, *o ile* $b \neq 0$,
5. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x,y) = ca$, *dla* $c \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje p, q *i* f *oraz* $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$ *spełniają warunki:*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$,

Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje p, q *i* f *oraz* $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$ *spełniają warunki:*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$,
2. $\big(p(x,y), q(x,y)\big) \neq (p_0, q_0)$ *dla każdego* $(x,y) \in S(x_0,y_0)$,

Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje p, q *i* f *oraz* $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$ *spełniają warunki:*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$,
2. $\big(p(x,y), q(x,y)\big) \neq (p_0, q_0)$ *dla każdego* $(x,y) \in S(x_0,y_0)$,
3. $\lim_{(p,q)\to(p_0,q_0)} f(p,q) = g$,

Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje p, q *i* f *oraz* $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$ *spełniają warunki:*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$,
2. $\big(p(x,y), q(x,y)\big) \neq (p_0, q_0)$ *dla każdego* $(x,y) \in S(x_0,y_0)$,
3. $\lim_{(p,q)\to(p_0,q_0)} f(p,q) = g$,

Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje p, q *i* f *oraz* $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$ *spełniają warunki:*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$,
2. $\big(p(x,y), q(x,y)\big) \neq (p_0, q_0)$ *dla każdego* $(x,y) \in S(x_0,y_0)$,
3. $\lim_{(p,q)\to(p_0,q_0)} f(p,q) = g$,

to

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\big(p(x,y), q(x,y)\big) = g.$$

Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje p, q *i* f *oraz* $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$ *spełniają warunki:*

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ *i* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$,
2. $\big(p(x,y), q(x,y)\big) \neq (p_0, q_0)$ *dla każdego* $(x,y) \in S(x_0,y_0)$,
3. $\lim_{(p,q)\to(p_0,q_0)} f(p,q) = g$,

to

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\big(p(x,y), q(x,y)\big) = g.$$

Uwaga 5

W Twierdzeniach 2 i 3 dopuszczalne są także granice niewłaściwe, o ile odpowiednie działania z takimi symbolami są oznaczone.

Uwaga 6

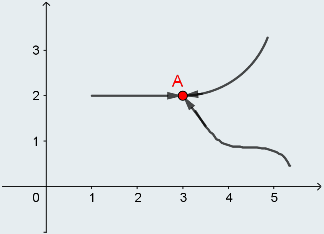
Wszystkie sposoby, które stosowaliśmy do liczenia granicy funkcji jednej zmiennej (za wyjątkiem reguły de l'Hospitala) możemy stosować do liczenia granicy funkcji dwóch zmiennych.

Uwaga 7

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$ *i* (x_0, y_0) *będzie punktem skupienia zbioru* D_f.
W punkcie (x_0, y_0) *możemy badać granicę funkcji* f.

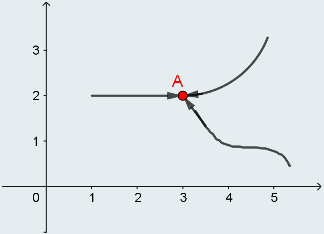
Uwaga 7

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$ *i* (x_0, y_0) *będzie punktem skupienia zbioru* D_f.
W punkcie (x_0, y_0) *możemy badać granicę funkcji* f.
Do punktu (x_0, y_0) *można zmierzać po dowolnej krzywej kończącej się w tym punkcie.*



Uwaga 7

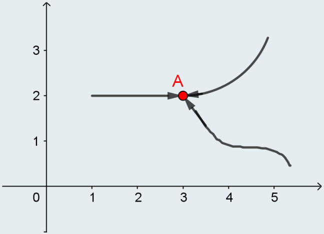
Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$ *i* (x_0, y_0) *będzie punktem skupienia zbioru* D_f.
W punkcie (x_0, y_0) *możemy badać granicę funkcji* f.
Do punktu (x_0, y_0) *można zmierzać po dowolnej krzywej kończącej się w tym punkcie.*



- *Jeżeli dla każdej drogi istnieje granica funkcji* f *i jest zawsze taka sama* $(= g)$, *to wtedy funkcja* f *ma granicę w punkcie* (x_0, y_0).

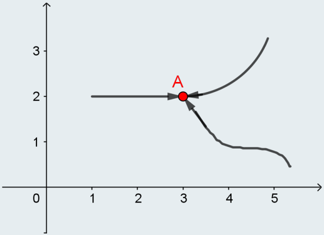
Uwaga 7

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$ *i* (x_0, y_0) *będzie punktem skupienia zbioru* D_f.
W punkcie (x_0, y_0) *możemy badać granicę funkcji* f.
Do punktu (x_0, y_0) *można zmierzać po dowolnej krzywej kończącej się w tym punkcie.*



- *Jeżeli dla każdej drogi istnieje granica funkcji* f *i jest zawsze taka sama* $(= g)$, *to wtedy funkcja* f *ma granicę w punkcie* (x_0, y_0).
- *Jeżeli dla dwóch różnych dróg wartości granic są różne, to funkcja* f *nie ma granicy w punkcie* (x_0, y_0).

Uwaga 8



Jeżeli wprowadzimy współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x - x_0 = \rho \cos \varphi \\ y - y_0 = \rho \sin \varphi \end{cases},$$

to zauważmy, że

$$(x, y) \to (x_0, y_0) \;\Rightarrow\; \begin{cases} \rho \to 0 \\ \varphi - \textit{dowolne, może się zmieniać} \end{cases}.$$

Wróćmy do Przykładu 2 i 3.
Jeżeli badamy granicę funkcji wymiernej (iloraz dwóch wielomianów) w punkcie $(0,0)$ i po wstawieniu w miejsce x i y zera otrzymujemy symbol nieoznaczony, to warto spróbować wprowadzić współrzędne biegunowe.

Przykład 4

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

Wróćmy do Przykładu 2 i 3.
Jeżeli badamy granicę funkcji wymiernej (iloraz dwóch wielomianów) w punkcie $(0,0)$ i po wstawieniu w miejsce x i y zera otrzymujemy symbol nieoznaczony, to warto spróbować wprowadzić współrzędne biegunowe.

Przykład 4

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^2} =$$

Wróćmy do Przykładu 2 i 3.
Jeżeli badamy granicę funkcji wymiernej (iloraz dwóch wielomianów) w punkcie $(0,0)$ i po wstawieniu w miejsce x i y zera otrzymujemy symbol nieoznaczony, to warto spróbować wprowadzić współrzędne biegunowe.

Przykład 4

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \text{\textit{w punkcie}} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0.$$

Wróćmy do Przykładu 2 i 3.
Jeżeli badamy granicę funkcji wymiernej (iloraz dwóch wielomianów) w punkcie $(0,0)$ i po wstawieniu w miejsce x i y zera otrzymujemy symbol nieoznaczony, to warto spróbować wprowadzić współrzędne biegunowe.

Przykład 4

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \text{\textit{w punkcie}} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0.$$

Zatem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

Przykład 5

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że nie istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0, y_0) = (0,0).$$

Przykład 5

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że nie istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^2} =$$

Przykład 5

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że nie istnieje granica funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (x_0,y_0) = (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi,$$

granica ta nie istnieje, bo jej wartość zależy od φ*, a więc od drogi.*

Uwaga 9

Gdyby w Przykładzie 4 nie było polecenia, że mamy użyć współrzędnych biegunowych to granicę tą moglibyśmy wyznaczyć inaczej, na przykład tak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

Uwaga 9

Gdyby w Przykładzie 4 nie było polecenia, że mamy użyć współrzędnych biegunowych to granicę tą moglibyśmy wyznaczyć inaczej, na przykład tak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

lub

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Ponieważ $(|a|-|b|)^2 \geq 0$, *więc* $a^2 - 2|a||b| + b^2 \geq 0$, *a stąd* $a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$, *czyli*

$$\frac{2|a||b|}{a^2+b^2} \leq 1 \text{ dla } a^2+b^2 \neq 0, \qquad (*)$$

co oznacza, że wyrażenie $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *dla* $x^2+y^2 \neq 0$ *jest ograniczone.*

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób I.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi \,+\, \rho^2\sin^2\varphi} =$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób I.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\varphi \, \rho \sin\varphi}{\rho^4 \cos^4\varphi \; + \; \rho^2 \sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \rho \frac{\cos^2\varphi \, \sin\varphi}{\rho^2 \cos^4\varphi \; + \; \sin^2\varphi} =$$

$$\begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi \neq 0 \\ 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi = 0 \\ ? & \textit{dla} \quad \sin\varphi \to 0 \end{cases},$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób I.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\varphi \, \rho \sin\varphi}{\rho^4 \cos^4\varphi \; + \; \rho^2 \sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \rho \frac{\cos^2\varphi \; \sin\varphi}{\rho^2 \cos^4\varphi \; + \; \sin^2\varphi} =$$

$$\begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi \neq 0 \\ 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi = 0 \\ ? & \textit{dla} \quad \sin\varphi \to 0 \end{cases},$$

Dobierzmy krzywą, tak aby $\sin\varphi \to 0$, *a w mianowniku zredukowała się suma* $x^4 + y^2$. *Niech* $y = x^2$, *wtedy badana granica wyniesie:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Badana granica nie istnieje ponieważ znaleźliśmy drogę (zobacz Uwaga 7), dla której wartość granicy jest różna od wartości granicy dla innych dróg.

Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0).$$

Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób II.

Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób II.

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ oraz $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0,0) \text{ i } \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0,0) \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} (x'_n, y'_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = (0,0) \text{ i } \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \neq (0,0) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób II.

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ oraz $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},0\right) = (0,0) \text{ i } \left(\frac{1}{n},0\right) \neq (0,0) \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n',y_n') = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = (0,0) \text{ i } \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \neq (0,0) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0,$$

Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Sposób II.

Niech $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},0\right)$ oraz $(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},0\right)=(0,0) \text{ i } \left(\frac{1}{n},0\right)\neq(0,0) \text{ dla } n\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n',y_n')=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)=(0,0) \text{ i } \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)\neq(0,0) \text{ dla } n\in\mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{0}{\frac{1}{n^4}}=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n',y_n')=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{2\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}.$$

Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Sposób II.
Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ oraz $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0,0) \ \text{ i } \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0,0) \ \text{ dla } \ n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = (0,0) \ \text{ i } \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \neq (0,0) \ \text{ dla } \ n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{2\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem badana granica nie istnieje.

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^3\varphi \, \rho \sin\varphi}{\rho^4 \cos^4\varphi \; + \; \rho^2 \sin^2\varphi} =$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \begin{cases} 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi \neq 0 \\ 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi = 0 \\ ? & \textit{dla} \quad \sin\varphi \to 0 \end{cases},$$

Gdy zmierzamy po krzywej $y = x^2$, *to badana granica wyniesie:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{2x^4} = 0$$ *- to nie jest kontrprzykład, więc granica badana może istnieć.*

Spróbujmy oszacować naszą funkcję

$$0 \leq \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \left|\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\cdot\frac{x}{2}\right| \leq \frac{|x|}{2}$$

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y)=\frac{x^3y}{x^4+y^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0). \quad D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Wówczas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\varphi\,\rho\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi\;+\;\rho^2\sin^2\varphi}=\begin{cases}0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi\neq 0\\ 0 & \textit{dla} \quad \sin\varphi=0\\ ? & \textit{dla} \quad \sin\varphi\to 0\end{cases},$$

Gdy zmierzamy po krzywej $y=x^2$, *to badana granica wyniesie:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{2x^4}=0$$ *- to nie jest kontrprzykład, więc granica badana może istnieć.*

Spróbujmy oszacować naszą funkcję

$$0\leq\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right|=\left|\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\cdot\frac{x}{2}\right|\leq\frac{|x|}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0 \qquad \textit{(zobacz (*))}.$$

Badana granica istnieje i wynosi 0.

Przykład 8

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

Przykład 8

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{w punkcie} \quad (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

Przykład 8

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Wyznaczenie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

sprowadzimy do znalezienia granicy funkcji jednej zmiennej.

Przykład 8

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

Wyznaczenie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

sprowadzimy do znalezienia granicy funkcji jednej zmiennej.

$$\textit{Podstawiając } u := x^2+y^2 \textit{ mamy } (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow u\to 0,$$

Zatem rozważana granica przyjmuje równoważną postać

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2}$$

Przykład 8

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x,y)=\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \textit{w punkcie} \quad (0,0).$$

$D_f=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Wyznaczenie granicy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

sprowadzimy do znalezienia granicy funkcji jednej zmiennej.

$$\textit{Podstawiając } u:=x^2+y^2 \textit{ mamy } (x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow u\to 0,$$

Zatem rozważana granica przyjmuje równoważną postać

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u}=\frac{1}{2}.$$

Badana granica istnieje i wynosi $\frac{1}{2}$.

Uwaga 10

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *i* $(x_0, y_0) \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D*.*
Z Definicji 16 (ciągłości funkcji w punkcie) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *jeżeli*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Uwaga 10

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *i* $(x_0, y_0) \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D*.*
Z Definicji 16 (ciągłości funkcji w punkcie) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *jeżeli*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Twierdzenie 4

1. *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a,b) *jest funkcją ciągłą w* (a,b)*.*

Uwaga 10

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *i* $(x_0, y_0) \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D.
Z Definicji 16 (ciągłości funkcji w punkcie) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *jeżeli*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Twierdzenie 4

1. *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b) *jest funkcją ciągłą w* (a, b).
2. *Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b) *jest funkcją ciągłą w* (a, b).

Uwaga 10

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *i* $(x_0, y_0) \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D*.*
Z Definicji 16 (ciągłości funkcji w punkcie) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *jeżeli*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Twierdzenie 4

1. *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b) *jest funkcją ciągłą w* (a, b)*.*
2. *Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b) *jest funkcją ciągłą w* (a, b)*.*
3. *Iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b)*, takich, że dzielnik w tym punkcie jest funkcją różną od zera, jest funkcją ciągłą w* (a, b)*.*

Uwaga 10

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *i* $(x_0, y_0) \in D$ *będzie punktem skupienia zbioru* D.
Z Definicji 16 (ciągłości funkcji w punkcie) dla $n = 2$ *wynika, że funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* (x_0, y_0) *jeżeli*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Twierdzenie 4

1. *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a,b) *jest funkcją ciągłą w* (a,b).
2. *Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a,b) *jest funkcją ciągłą w* (a,b).
3. *Iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a,b)*, takich, że dzielnik w tym punkcie jest funkcją różną od zera, jest funkcją ciągłą w* (a,b).
4. *Jeżeli funkcja* $F\big(g(x,y)\big)$ *jest określona na pewnym otoczeniu punktu* (a,b)*, funkcja* $g(x,y)$ *jest ciągła w punkcie* (a,b)*, a funkcja* $F(u)$ *jest ciągła w punkcie* $u = g(a,b)$ *to funkcja złożona* $F\big(g(x,y)\big)$ *jest ciągła w punkcie* (a,b).

Przykład 9

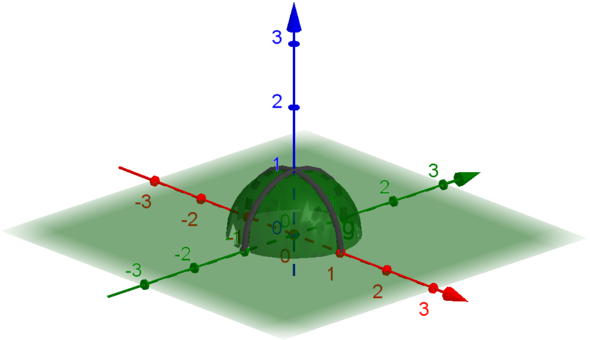
Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & dla \quad x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & dla \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases} .$$

Przykład 9

Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & dla \quad x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & dla \quad x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$



Twierdzenie 5 (Weiestrassa)

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *będzie obszarem domkniętym i ograniczonym. Wówczas jeżeli funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w* D *to:*

Twierdzenie 5 (Weiestrassa)

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *będzie obszarem domkniętym i ograniczonym. Wówczas jeżeli funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w* D *to:*

1. *jest ograniczona,*

Twierdzenie 5 (Weiestrassa)

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ *będzie obszarem domkniętym i ograniczonym. Wówczas jeżeli funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w* D *to:*

1. *jest ograniczona,*
2. *przyjmuje co najmniej raz w zbiorze* D *wartość najmniejszą i wartość największą.*